ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΑΘΗΝΩΝ 12/12/2022
ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

Ο λόγος των βώλων του Σπύρου προς τους βώλους της Άννας είναι $\frac{3}{2}$. Ο Σπύρος αποφάσισε να δώσει τα $\frac{3}{4}$ των βώλων του σε μία άλλη φίλη του, οπότε οι βώλοι του έγιναν 30 λιγότεροι από της Άννας. Πόσους βώλους έχει η Άννα;

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας (2 μονάδες)

Απάντηση

Έστω Σ οι βώλοι του Σπύρου και Α οι βώλοι της Άννας.

Έχουμε: $\frac{\Sigma}{A}=\frac{3}{2}\Rightarrow \Sigma=\frac{3}{2}A$, (1)

Τα $\frac{3}{4}$ των βώλων του Σπύρου είναι: $\frac{3}{4}\Sigma \overset{(1)}{=}\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}A=\frac{9}{8}A$, (2)

Τώρα ο Σπύρος έχει το $\frac{1}{4}$ των βώλων του, δηλαδή $\left(\frac{1}{4}\Sigma\right)$ βώλους και είναι κατά 30 λιγότεροι από τους βώλους της Άννας.

Έτσι είναι: $\frac{1}{4}\Sigma+30=A\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}A+30=A$

$$\Rightarrow \frac{3}{8}A+30=A\Rightarrow A-\frac{3}{8}A=30$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8}A=30\Rightarrow A=\frac{8\cdot 30}{5}\Rightarrow A=48$$

Άρα η Άννα έχει 48 βώλους.

ΘΕΜΑ Β.

Όταν ένα δοχείο είναι 30% άδειο περιέχει 30 λίτρα περισσότερα από ότι όταν είναι 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα περιέχει το γεμάτο δοχείο;

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας (2 μονάδες)

Απάντηση

Όταν ένα δοχείο είναι κατά 30% άδειο, αυτό σημαίνει ότι είναι κατά 70% γεμάτο. Συνδυάζοντας με την δεύτερη περίπτωση έχουμε μία διαφορά $70\%-30\%=40\%$ που μεταφράζεται σε 30 λίτρα. Έτσι έχουμε:

40% της χωρητ/τας του δοχείου είναι 30 λίτρα

100% της χωρητ/τας του δοχείου είναι x; λίτρα (Ποσά ανάλογα)

$40\cdot x=30\cdot 100\Rightarrow x=75$ λίτρα.

Άρα το γεμάτο δοχείο περιέχει 75 λίτρα.

ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΑΘΗΝΩΝ 12/12/2022
ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Γ.

Η Νίκη θέλει να απλοποίηση το κλάσμα $\frac{19}{95}$. Αποφασίζει να διαγράψει το ΄9΄ του ΄19΄ με το ΄9΄ του ΄95΄. Με αυτό το λανθασμένο τρόπο η απλοποίησης η Νίκη βρήκε ότι $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$ το οποίο όμως είναι σωστό! Να βρεθεί ένα κλάσμα με αριθμητή και παρονομαστή διψήφιους αριθμούς το οποίο να είναι ισοδύναμο με το $\frac{2}{5}$ και όταν απλοποιηθεί με το λανθασμένο τρόπο απλοποίησης της Νίκης να προκύπτει το σωστό αποτέλεσμα $\frac{2}{5}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (2 μονάδες)

Απάντηση

Έστω α το κοινό ψηφίο των δύο διψήφιων αριθμών που θα απλοποιήσουμε. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε:

$$\frac{\overline{2\alpha}}{\overline{\alpha 5}}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{\overline{2\alpha}}{\overline{\alpha 5}}=\frac{2\cdot 10+\alpha}{\alpha\cdot 10+5}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{20+\alpha}{10\cdot\alpha+5}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5\cdot(20+\alpha)=2(10\cdot\alpha+5)$$

$$\Rightarrow 100+5\cdot\alpha=20\cdot\alpha+10$$

$$\Rightarrow 20\cdot\alpha-5\cdot\alpha=100-10$$

$$\Rightarrow 15\cdot\alpha=90\Rightarrow\alpha=6$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\frac{26}{65}$.

Πράγματι απλοποιώντας κανονικά έχουμε $\frac{26}{65}=\frac{26:13}{65:13}=\frac{2}{5}$.

ΘΕΜΑ Δ.

Να βρείτε τους πρώτους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 9 και μικρότεροι του 99 .
Πόσοι από αυτούς παραμένουν πρώτοι αν αντιστραφεί η σειρά των ψηφίων τους;
Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (2 μονάδες)

Απάντηση

Με έναν σύντομο έλεγχο διαπιστώνουμε ότι οι πρώτοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 9 και μικρότεροι του 99 αποτελούν το σύνολο:

$$A=\{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$$

Συνολικά 21 αριθμοί.

Αντιστρέφουμε τη σειρά των ψηφίων τους και προκύπτει το σύνολο:

$$B=\{11, 31, 71, \cancel{91}, \cancel{32}, \cancel{92}, 13, 73, \cancel{14}, \cancel{34}, \cancel{74}, \cancel{35}, \cancel{95}, \cancel{16}, \cancel{76}, 17, 37, 97, \cancel{38}, \cancel{98}, 79\}$$

Συγκρίνοντας με το σύνολο Α διαγράφουμε από το σύνολο Β τα στοιχεία του, που δεν είναι πρώτοι αριθμοί και διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 9 αριθμοί που παραμένουν πρώτοι.

ΘΕΜΑ Ε.

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που πρέπει να προστεθεί στον αριθμό 3.496 έτσι ώστε το άθροισμά τους να διαιρείται ακριβώς με το 3 και το 4 το 5 και το 12;

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (3 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το $\text{Ε.Κ.Π.}(3,4,5,12)=\text{Ε.Κ.Π.}(3,2^2,5,3\cdot 2^2)=2^2\cdot 3\cdot 5=60$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι το πολλαπλάσιο του 60 που είναι αμέσως μεγαλύτερο του 3.496. Δηλαδή ο αριθμός $3.600-60=3.540$ Είναι ($3.540=59\cdot 60$)

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός που πρέπει να προστεθεί στο 3.496 είναι ίσος με τη διαφορά $3.540-3.496=44$

ΘΕΜΑ ΣΤ.

Να λυθεί η εξίσωση: $12_5\cdot(x_5-11_5)=433_5-23_5\cdot x_5$

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (3 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$12_5\cdot(x_5-11_5)=433_5-23_5\cdot x_5 \Rightarrow 12_5\cdot x_5-12_5\cdot 11_5=433_5-23_5\cdot x_5$$
$$\Rightarrow 12_5\cdot x_5+23_5\cdot x_5=433_5+12_5\cdot 11_5$$

Ενδιάμεσες πράξεις:

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 2\ (5) \\ + & 2 & 3 \\ \hline & 4 & 0 \end{array}\ ,\quad \begin{array}{rrrr} & & 1 & 2\ (5) \\ & \times & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 2 \\ + & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}\ ,\quad \begin{array}{rrrr} & 4 & 3 & 3\ (5) \\ + & 1 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 40_5\cdot x_5=433_5+132_5$$
$$\Rightarrow 40_5\cdot x_5=1120_5$$
$$\Rightarrow x_5=1120_5:40_5 \Rightarrow x_5=13_5$$

Τη διαίρεση θα την εκτελέσουμε μετατρέποντας τους αριθμούς από το πενταδικο στο δεκαδικό σύστημα. Είναι:

- $1120_5=1\cdot 5^3+1\cdot 5^2+2\cdot 5^1+0\cdot 5^0=125+25+10+0=160_{10}$
- $40_5=4\cdot 5^1+0\cdot 5^0=20+0=20_{10}$

Όμως: $160_{10}:20_{10}=8_{10}$

Τώρα μετατρέπουμε τον 8_{10} από το δεκαδικό στο πενταδικο σύστημα εκτελώντας τη διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$ και έχουμε $8_{10} = 13_5$.

ΘΕΜΑ Ζ.

Η Ιωάννα υποστηρίζει ότι: «Ισχύει $\nu \ge \sqrt{\nu+1}$, (1) για κάθε ν φυσικό μεγαλύτερο του 1»

Συμφωνείτε;

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (3 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Συμφωνούμε με τον ισχυρισμό της Ιωάννας και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \ge 2$.

Έχουμε:
$$\left.\begin{array}{l} \nu \ge 2 \\ \Rightarrow \nu - 1 \ge 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nu(\nu-1) \ge 2 \cdot 1 = 2 \ge 1$$
$$\Rightarrow \nu^2 - \nu \ge 1 \Rightarrow \nu^2 \ge \nu + 1 > 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\nu^2} \ge \sqrt{\nu+1} \Rightarrow \nu \ge \sqrt{\nu+1}$$

Άρα η πρόταση (1) ισχύει για κάθε ν φυσικό μεγαλύτερο με $\nu \ge 2$.

ΘΕΜΑ Η.

Η Ιωάννα υποστηρίζει ότι: «Ισχύει ο αριθμός $2^\alpha + 5^\alpha$ διαιρείται ακριβώς με το 7 για κάθε α φυσικό αριθμό περιττό». Συμφωνείτε;

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (3 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$1^{ος}$ Τρόπος (με χρήση γνωστής ταυτότητας)

Αν ν είναι περιττός τότε ισχύει η ταυτότητα:

$$x^\nu + y^\nu = (x+y)\left(x^{\nu-1} - x^{\nu-2}y + x^{\nu-3}y^2 + \cdots + x^2y^{\nu-3} - xy^{\nu-2} + y^{\nu-1}\right)$$

Για $x=2$, $y=5$ και $\nu=\alpha$ έχουμε:

$$2^\alpha + 5^\alpha = (2+5)\left(2^{\alpha-1} - 2^{\alpha-2}\cdot 5 + 2^{\alpha-3}\cdot 5^2 + \cdots + 2^2\cdot 5^{\alpha-3} - 2\cdot 5^{\alpha-2} + 5^{\alpha-1}\right)$$
$$\Rightarrow 2^\alpha + 5^\alpha = 7\cdot \underbrace{\left(2^{\alpha-1} - 2^{\alpha-2}\cdot 5 + 2^{\alpha-3}\cdot 5^2 + \cdots + 2^2\cdot 5^{\alpha-3} - 2\cdot 5^{\alpha-2} + 5^{\alpha-1}\right)}_{\text{(πράξεις που δίνουν αποτέλεσμα φυσικό αριθμό)}} = \pi o\lambda 7$$

Άρα ο αριθμός $2^\alpha + 5^\alpha$ διαιρείται ακριβώς με το 7 για κάθε α φυσικό αριθμό περιττό.

$2^{ος}$ Τρόπος (με το διώνυμο του Newton)

Ο α είναι περιττός οπότε μπορεί να γραφεί $\alpha = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$2^\alpha + 5^\alpha = 2^{2\nu+1} + 5^{2\nu+1} = \pi o\lambda.7$$

Έχουμε: $2^{2\nu+1} + 5^{2\nu+1} = 2\cdot 4^\nu + 5\cdot 25^\nu$

$$= 2\cdot 4^\nu + 5\cdot(21+4)^\nu$$

ισχύει: $(\alpha+\beta)^\nu = \pi o\lambda.\alpha + \beta^\nu$
$= \alpha^\nu + \pi o\lambda.\beta$

$$=2\cdot 4^{\nu}+5\cdot\left(\pi o\lambda.21+4^{\nu}\right)$$

$$=2\cdot 4^{\nu}+5\cdot\pi o\lambda.7+5\cdot 4^{\nu}\ , \qquad (\text{ είναι } \pi o\lambda.21=\pi o\lambda.7 \text{ })$$

$$=7\cdot 4^{\nu}+5\cdot\pi o\lambda.7=\pi o\lambda.7$$

$3^{ος}$ Τρόπος (με ισοϋπόλοιπα)

Έχουμε: $\upsilon\pi(2:7)=2,\ \upsilon\pi(2:7)=2,\ \upsilon\pi(5:7)=5,\ \upsilon\pi(25:7)=4$, οπότε

$$\upsilon\pi\left[\left(2^{2\nu+1}+5^{2\nu+1}\right):7\right]=\upsilon\pi\left[\left(2\cdot 4^{\nu}+5\cdot 25^{\nu}\right):7\right]$$

$$=\upsilon\pi\left[\left(2\cdot 4^{\nu}+5\cdot 4^{\nu}\right):7\right]$$

$$=\upsilon\pi\left[\left(7\cdot 4^{\nu}\right):7\right]=0$$

Άρα: $2^{\alpha}+5^{\alpha}=2^{2\nu+1}+5^{2\nu+1}=\pi o\lambda.7$

$4^{ος}$ Τρόπος (με μαθηματική επαγωγή)

Θα δείξουμε ότι:

$$2^{\alpha}+5^{\alpha}=2^{2\nu+1}+5^{2\nu+1}=2\cdot 4^{\nu}+5\cdot 25^{\nu}=\pi o\lambda.7 \ \ (1) \quad \text{για κάθε } \nu\in\mathbb{N}$$

Βήμα 1^{o}

Εξετάζουμε αν η (1) ισχύει για $\nu=0$.

Δηλαδή $2\cdot 4^{0}+5\cdot 25^{0}=2+5=7=\pi o\lambda.7$, Ισχύει.

Βήμα 2^{o}

Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για $\nu=\kappa$.

Δηλαδή: $2\cdot 4^{\kappa}+5\cdot 25^{\kappa}=\pi o\lambda.7 \Rightarrow 2\cdot 4^{\kappa}+5\cdot 25^{\kappa}=7\rho,\ (2)\ \rho\in\mathbb{N}$

Βήμα 3^{o}

Θα αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για $\nu=\kappa+1$.

Δηλαδή: $2\cdot 4^{\kappa+1}+5\cdot 25^{\kappa+1}=\pi o\lambda.7$, (3)

Είναι: $2\cdot 4^{\kappa+1}+5\cdot 25^{\kappa+1}=2\cdot 4^{\kappa}\cdot 4+5\cdot 25^{\kappa}\cdot 25$

$$\overset{(2)}{=}\left(7\rho-5\cdot 25^{\kappa}\right)\cdot 4+125\cdot 25^{\kappa}$$

$$=28\rho-20\cdot 25^{\kappa}+125\cdot 25^{\kappa}$$

$$=28\rho+105\cdot 25^{\kappa}$$

$$=7\cdot 4\rho+7\cdot 15\cdot 25^{\kappa}$$

$$=7\left(4\rho+15\cdot 25^{\kappa}\right)=\pi o\lambda.7$$

Επομένως η (3) ισχύει και με βάση τη μαθηματική επαγωγή ισχύει η (1) για κάθε περιττό αριθμό $\alpha=2\nu+1,\ \nu\in\mathbb{N}$.